立体几何与平面解析几何的交汇题

辅教导学

曾安雄

(泰顺县第一中学,浙江　325500)

在知识的交汇处命题是近年高考的一个命题趋向,下面例析立体几何与平面解析几何的交汇题.

1　立体图形在平面上的射影

例 1　如图 1,一球形广告气球被一束入射角为 α 的平行光线照射,其投影是一个长半轴为 5m 的椭圆,则制作这个广告气球至少需要的面料是__________ m^2.

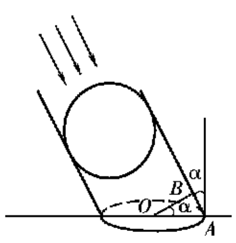

图 1　例 1 图

解　如图 1,半长轴 $OA = 5$, $\angle AOB = \alpha$. 设气球的半径为 r,则

$r = 5\cos\alpha$,

$\therefore S = 4\pi r^2 = 100\pi\cos^2\alpha(m^2)$.

即制作这个气球至少需面料 $100\pi\cos^2\alpha m^2$.

2　用平面截立体图形的截面

例 2　用一个与圆柱母线成 60°角的平面截圆柱,截口是一个椭圆,求此椭圆的离心率.

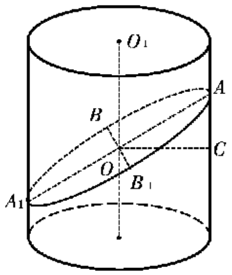

图 2　例 2 图

解　如图 2, OA 的长度即为截面椭圆的长半轴长 a, OB 的长度为椭圆的短半轴 b. 截面椭圆中 OB 的长度即为圆柱的半径,即 $|OB| = |OC| = b$.

由 $\angle AOO_1 = 60°$,得 $\angle AOC = 30°$,

$\cos 30° = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{2}$.

3　立体图形中的点构成平面图形

例 3　(2004 年全国高考北京卷) 如图 3,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点,若 P 到直线 BC 与直线 C_1D_1 的距离相等,则动点 P 的轨迹所在的曲线是　(　　)

(A) 直线.　　(B) 圆.

(C) 双曲线　　(D) 抛物线.

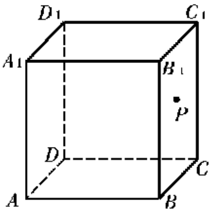

图 3　例 3 图

解　∵点 P 到直线 C_1D_1 的距离即 P 到 C_1 的距离,

∴在面 BCC_1B_1 中, P 到定点 C_1 的距离与 P 到定直线 BC 的距离相等,由抛物线的定义知,其轨迹应是抛物线,故选(D).

4　平面图形翻折为立体图形

例 4　椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的长轴为 A_1A_2,短轴为 B_1B_2,将坐标平面沿 y 轴折成一个

二面角,如图,使点 A_1 在平面 $B_1A_2B_2$ 上射影恰好是该椭圆的一个焦点,求这个二面角的大小.

解　折后,点 A_1 在平面 $B_1A_2B_2$ 上的射影必为椭圆的右焦点,即 $A_1F_2 \perp$ 面 $B_1A_2B_2$,

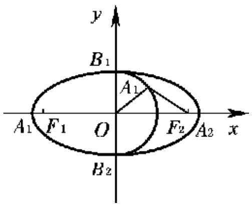

图 4　例 4 图

$\therefore \angle A_1OF_2$ 即为所求二面角的平面角.

由题意 $|OF_2| = c = \sqrt{3}$,$|OA_1| = a = 2$,

$\therefore \cos\angle A_1OF_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $\angle A_1OF_2 = 30°$.

评注　折后的图形中,点在面上的射影点的寻找与应用是解这个题的关键.

5　平面图形旋转成立体图形

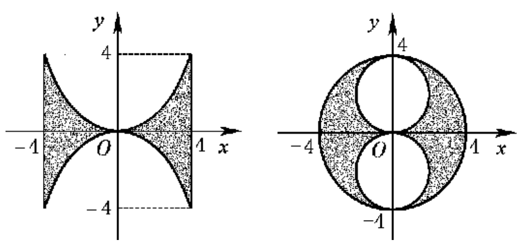

图 5　例 5 图

例 5　由曲线 $x^2 = 4y$,$x^2 = -4y$,$x = 4$,$x = -4$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积为 V_1,满足 $x^2 + y^2 \leq 16$,$x^2 + (y-2)^2 \geq 4$,$x^2 + (y+2)^2 \geq 4$ 的点组成的图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积为 V_2,则

(A) $V_1 = \frac{1}{2}V_2$.　　(B) $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.

(C) $V_1 = V_2$.　　(D) $V_1 = 2V_2$.

解　如图 5,两图形绕 y 轴旋转所得旋转体夹在两相距为 8 的平行平面之间. 用任意一个与 y 轴垂直的平面截这两个旋转体,设截面与原点的距离为 $|y|$,则所得截面面积分别为:

$$S_1 = \pi(4^2 - 4|y|),$$

$$S_2 = \pi(4^2 - y^2) - \pi[4 - (2 - |y|)^2]$$

$$= \pi(4^2 - 4|y|),$$

$\therefore S_1 = S_2$. 由祖暅原理知,两几何体体积相等,$\therefore V_1 = V_2$. 故选(C).

例 6　已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1(a > b > 0)$,把其绕 y 轴旋转一周得一椭球体,已知椭圆面积为 $S = \pi ab$,利用祖暅原理,试求此椭球体积.

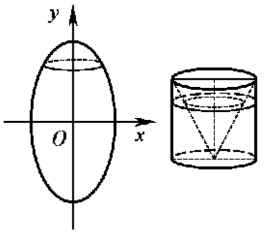

图 6　例 6 图

解　如图 6,构造一底半径为 b,高为 a 的圆柱体,以上底面圆为底面,下底圆心为顶点做一圆锥,让椭球上半部分与圆柱夹在两平行平面之间. 设椭圆上任意点 $P(\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - t^2}, t)$,过 P 作垂直于 y 轴的平面截椭球得一截面圆,截圆柱得一圆环,且

$$S_{圆} = \pi(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2})^2 = \pi b^2(1 - \frac{t^2}{a^2}),$$

$$S_{环} = S_{柱} - S_{锥} = \pi[b^2 - (\frac{bt}{a})^2]$$

$$= \pi b^2(1 - \frac{t^2}{a^2}).$$

$\therefore S_{截} = S_{环}$.

由祖暅原理知

$$V_{上椭} = V_{柱} - V_{锥} = \frac{2}{3}\pi ab^2.$$

$$\therefore V_{椭球} = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

(收稿日期:2004 - 09 - 01)