长沙通信职业技术学院学报
第 2 卷第 1 期 Journal of Changsha Telecommunications Vol. 2 No. 1
2003 年 3 月 and Technology Vocational College Mar. 2003

关于空间解析几何中"矢量积"教学的探讨

周卓夫
(长沙通信职业技术学院 湖南长沙 410015)

[摘 要]利用行列式的性质来证明"矢量积"的性质,打破了一般工科大学教科书的常规,有一定的创新。

[关键词]矢量积;数量积;行列式
[中图分类号] 0182.2 [文献标识码] A [文章编号] 1671 - 9581(2003) - 01 - 075 - 03
①

Teaching of "vector product" in space analytic geometry

Zhou Zhuofu

Abstract: This paper verifies the quality of the vector product by using the quality of determinant and it breaks free from conventions of the general textbooks in the colleges of engineering and has some innovation.

Key Words: vector product; quantitative product; determinant

矢量积(外积)

定义:设两矢量 $\vec{a}=\{x_1y_1z_1\}$ 与 $\vec{b}=\{x_2y_2z_2\}$,则它们的矢量积为:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\{y_1z_2-y_2z_1, z_1x_2-z_2x_1, x_1y_2-x_2y_1\}$$

为帮助记忆,利用三阶行列式,上式可写成:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)i+(z_1x_2-z_2x_1)j+(x_1y_2-x_2y_1)k$$

例 1:已知两矢量 $\vec{a}=\{1,5,3\}$ 与 $\vec{b}=\{2,6,4\}$,求 i $\vec{a}$,$\vec{b}$ 的矢量积,ii 新矢量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的模,iii 用图形表示出来。

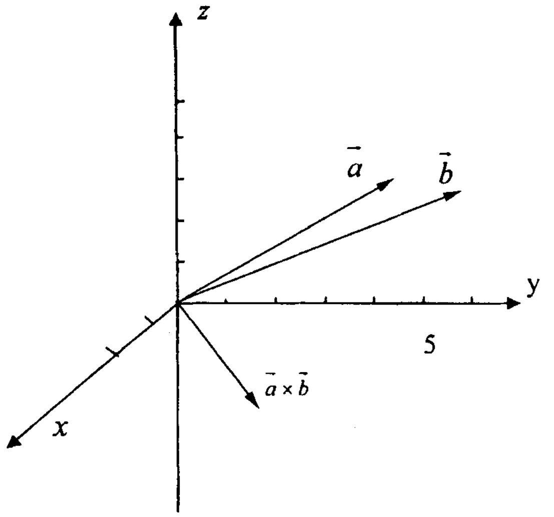
解:i 由定义得:$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}=2i+2j-4k$

ii $=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{24}$ ($\because \vec{a}\times\vec{b}=\{2,2,-4\}$)

iii

① [收稿日期]2003 - 02 - 21
[作者简介]周卓夫(1956 -),男,湖南长沙人,高级讲师,研究方向:空间解析几何。

© 1995-2007 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.



1　性质

1^0　当且仅当 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ (即 a ∥b ,共线) 时 , $\vec{a}\times\vec{b}=0$

证:由行列式的性质:"若行列式的两行(或两列)的对应元素成比例,则此行列式等于零"所以:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \end{vmatrix}=0$$

推论:若矢量 $\vec{a}$,$\vec{b}$的对应坐标成比例,即 $\left(\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}\right)$,则 $b=\lambda a$

2^0　两矢量的矢量积不具备交换律,即:$\vec{b}\times\vec{a}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

或:矢量积对于因子的对调要改变符号。

证:根据:"对调行列式的两行(或两列),行列式改变符号",所以:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

3^0　矢量积与数量相乘有结合律的性质,即 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

证:根据:"行列式某一行(或列)各元素的公因子可以提到行列式的记号外边","将行列式的某一行(或列)的所有元素同乘以某一数 k,其结果等于以数 k 乘这个行列式"所以:

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \lambda x_2 & \lambda y_2 & \lambda z_2 \end{vmatrix}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$$

4^0　矢量积具有分配律的性质,即:$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

证:根据"若行列式的一行(或一列)的各元素都是两项式,则此行列式等于两个行列式的和"所以:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1+y_2 & y_1+y_2 & z_1+z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

以上我们利用已掌握的行列式的知识,讨论了行列式的性质,然而这仅仅是从数的方面对矢量积的刻化,因为解析几何是形与数的结合,所以我们还必须从形(即几何意义)上对矢量积来加以讨论。比如说,由矢量积作出的新矢量,它是否同数量积那样,只需通过一简单的几何图形就能表示出它的大小,另外,新矢量的方向与原来两矢量的指向之间存在着什么样的关系。

2　几何意义

设:两矢量 $\vec{a}$,$\vec{b}$的矢量积 $\vec{a}\times\vec{b}$等于矢量 $\vec{c}$,即 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$,则:

1°　矢量 $\vec{c}$ 的模在数值上等于以矢量 $\vec{a}$,$\vec{b}$为边的平形四边形的面积,证明从略。

2°　矢量 $\vec{c}$ 垂直于矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$所确定的平面

证:$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=x_1(y_1z_2-y_2z_1)+y_1(z_1x_2-z_2x_1)$

$$+z_1(x_1y_2-x_2y_1)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

© 1995-2007 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

又:$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=x_2(y_1z_2-y_2z_1)+y_2(z_1x_2-z_2x_1)$

$$+z_2(x_1y_2-x_2y_1)=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

3° 矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 组成右旋系

证:取矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所确定的平面为 XOY 坐标面,且 $\vec{a}$ 与 x 轴共线,指向一致,假设 $(\vec{a},\vec{b})=\theta$　$0\le\theta\le\pi$,于是有:

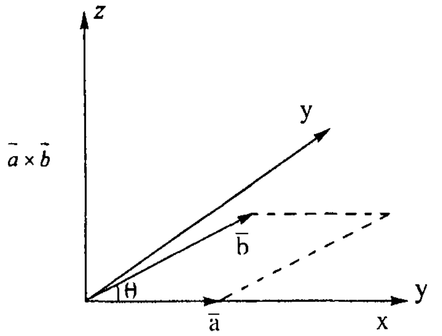
$\vec{a}=\{|\vec{a}|,0,0\}$　$\vec{b}=\{|\vec{b}|\cos\theta,|\vec{b}|\sin\theta,0\}$

根据矢量积的定义得:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ |\vec{a}| & 0 & 0 \\ |\vec{b}|\cos\theta & |\vec{b}|\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=oi+oj+|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta k$$

此也表示 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ 即 1° 成立。



由此得矢量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 Z 轴的正向相同,即 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 组成“右旋系”

例 2　计算单位矢量 i、j、k 彼此两的矢量积

解:由性质 1^0　$i\times i=0$　$j\times j=0$　$k\times k=0$

(平行即共线)

由几何意义　$i\times i=k$　$j\times k=i$　$k\times i=j$

性质 2^0　$j\times i=-k$　$k\times j=-i$　$i\times j=-i$

[参考文献]

[1]同济大学数学教研室主编〈高等数学〉[M].高等教育出版社,1996.

[2]施学瑜.高等数学教程[M].清华大学出版社,1985.

© 1995-2007 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.